Devoir surveillé : Trigonométrie

Exercice 1

Convertir les angles suivant de degrés en radians ou dans le sens contraire (sans justification)

$\alpha = 65° =$ …………………rad et $\beta = \frac{3\pi}{25}\ rad$=……………………..°

Exercice 2

Déterminer la mesure principale de l'angle suivant : $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{5789\pi}{13}\ [2\pi]$.

Vous laisserez une trace de votre calcul.

Exercice 3

On sait qu'un angle x dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vérifie $\sin x = -0{,}2$. Déterminer $\cos x$ et $\tan x$.

Exercice 4 : Ligne brisée

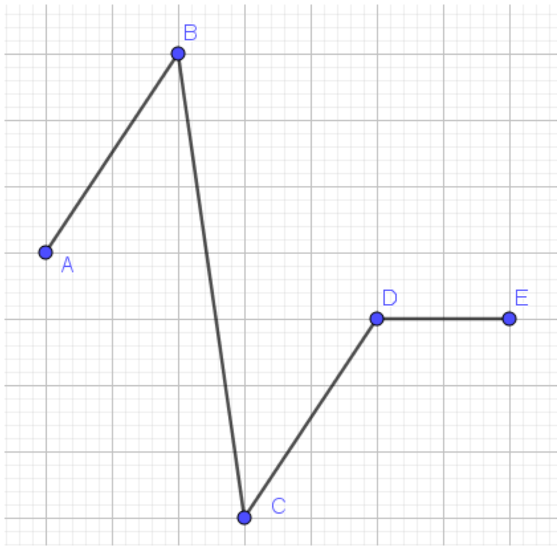
Soit une ligne brisée ABCDE ressemblant à celle de droite et vérifiant :

$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$,

$\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right) = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

et $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}\right) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

1) Annoter votre figure (indiquer les angles)
2) Calculer les mesures de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}\right)$



Exercice 5 Arc associés

1) Déterminer $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
2) Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$ déterminer $\cos\frac{7\pi}{12}$, puis sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ déterminer $\sin\frac{3\pi}{10}$.
3) Donner sans justifier les mesures en radian des angles donc le cosinus vaut $-\frac{1}{2}$ et une autre dont le sinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (par exemple si je veux les mesure des angles dont le sinus vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ je vais avoir : $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$)

Exercice 6 équation trigonométrique

1) Résoudre $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$
   a. dans $\mathbb{R}$
   b. dans $[0;2\pi]$
2) Représenter sur un cercle les points associés aux angles solutions.

Correction

Exercice 1 $\alpha = 65° = 65 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{13\pi}{36}$ rad et $\beta = \frac{3\pi}{25}\ rad = \frac{\frac{3\pi}{25}360}{2\pi} = 21{,}6°$

Exercice 2

$-\frac{5789\pi}{13} + 22 \times 2\pi = \frac{9}{13}\pi$ or $\frac{9}{13}\pi \in]-\pi;\pi]$ donc $\frac{9}{13}\pi$ est la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 3

On sait qu'un angle x dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vérifie $\sin x = -0{,}2$. Déterminer $\cos x$ et $\tan x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + (-0{,}2)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - 0{,}04 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{0{,}96}$ ou

$\cos x = -\sqrt{0{,}96}$ or $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos x \geq 0$ et donc $\cos x = \sqrt{0{,}96}$

De plus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-0{,}2}{\sqrt{0{,}96}} = \frac{-0{,}2\sqrt{0{,}96}}{0{,}96} = -\frac{5}{24}\sqrt{0{,}96}$

Exercice 4 : Ligne brisée

on sait que $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ en déduire $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE})$

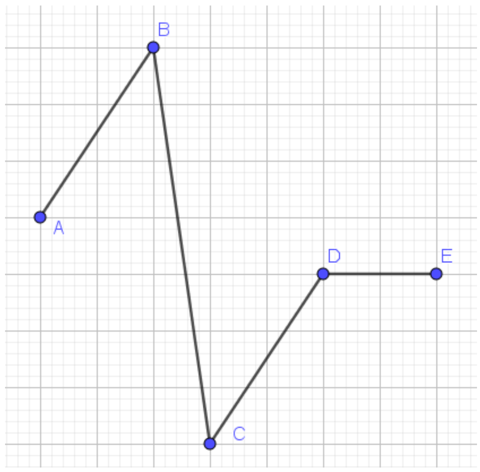
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DE})\ [2\pi]$

$= (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) + \pi + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) + \pi + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) + \pi\ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{5\pi}{6} + 3\pi\ [2\pi]$

$= \frac{4\pi}{12} + \left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{10\pi}{12} + \frac{36\pi}{12}\ [2\pi] = \frac{45\pi}{12}\ [2\pi] = \frac{15\pi}{4}\ [2\pi]$

$\frac{15\pi}{4}$ est une mesure il y en a d'autre comme $\frac{7\pi}{4}$ que j'obtiens en ajoutant ou retranchant un nombre de fois 2π



Exercice 5 Arc associés

1) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

2) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$, et $\sin\frac{3\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 6 équation trigonométrique

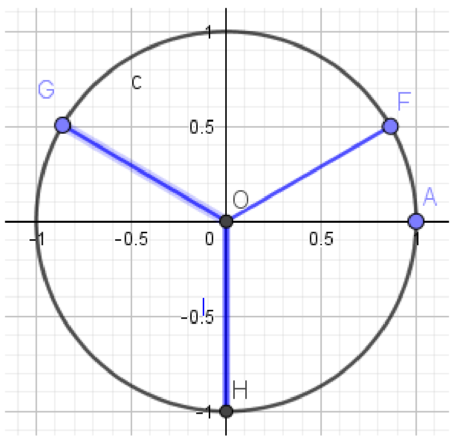
Résoudre $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$

1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ ou \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ ou \\ 3x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ ou \\ x = \frac{\pi}{6}\ [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$

Solutions dans $[0;2\pi]$, la première équation me donne $\frac{\pi}{6}$ et la seconde $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$S = \left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$



Correction commentée

Exercice 2

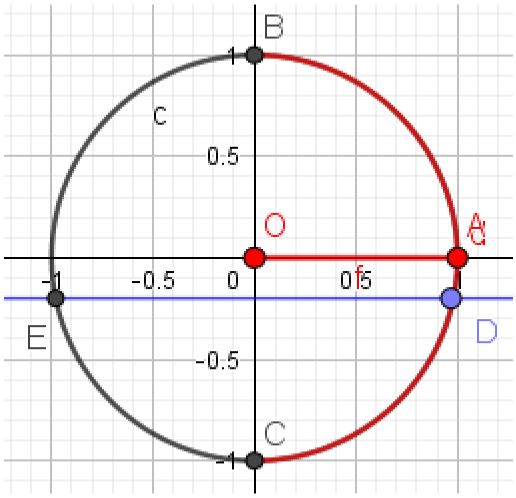
Pour trouver le nombre de tours à enlever/ajouter, il suffit de regarder le nombre de tours dans l'angle proposé et d'arrondir classiquement ce nombre : $\frac{-\frac{5789\pi}{13}}{2\pi} \approx -222{,}65 \approx -223$

Puis on retranche à l'angle la mesure d'angle associée à ce nombre de tour

$-\frac{5789\pi}{13} - (-223) \times 2\pi = \frac{9}{13}\pi$

or $\frac{9}{13}\pi \in]-\pi;\pi]$ donc $\frac{9}{13}\pi$ est la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$.

Pour terminer on vérifie notre réponse :



Exercice 3

Avant de se lancer on peut visualiser vite fait la situation pour voir de quoi il retourne :

On propose dans l'énoncé $\sin x = -0{,}2$ ça veut dire que sur le cercle la hauteur du point associé à x sera $-0{,}2$. J'ai tracé le droite d'équation $y = -0{,}2$, elle coupe le cercle en E et en D donc les angles associés à ces deux points auront un sinus valant -0,2.

$x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ veut dire que l'on est dans la partie de droite et donc que le cosinus est positif le seul point convenable est D, mais le voir ne nous donne ni la valeur de x avec précision ni celle du cosinus ou de la tangente il faudra passer par une résolution d'équation pour trouver les deux dernières valeurs.

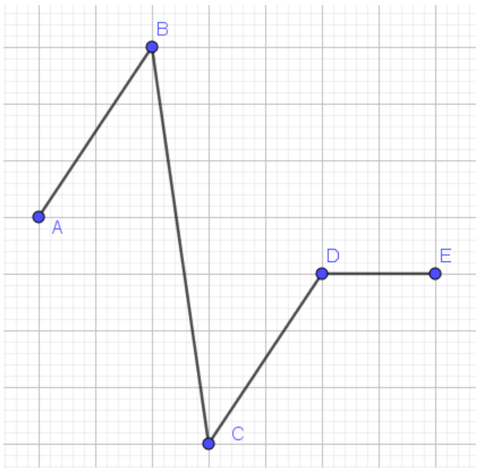
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + (-0{,}2)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - 0{,}04 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{0{,}96}$ ou $\cos x = -\sqrt{0{,}96}$ or $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ donc $\cos x \geq 0$ et donc $\cos x = \sqrt{0{,}96}$

De plus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-0{,}2}{\sqrt{0{,}96}} = \frac{-0{,}2\sqrt{0{,}96}}{0{,}96} = -\frac{5}{24}\sqrt{0{,}96}$

Remarque : certain confondent l'angle x avec son cosinus et son sinus , qui graphiquement sont les coordonnées du point associé à x sur le cercle trigonométrique

Exercice 4 : Ligne brisée

La première chose à faire est de casser l'angle en utilisant la relation de chasles en essayant de faire apparaitre les angles connus :



$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DE})\ [2\pi]$

Là on se rend compte que les angles obtenus ressemblent mais ne sont pas ceux de l'énoncé

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})\ [2\pi]$ (ligne optionnelle)

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = \pi + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) + \pi + (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) + \pi + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{5\pi}{6} + 3\pi\ [2\pi]$

$= \frac{4\pi}{12} + \left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{10\pi}{12} + \frac{36\pi}{12}\ [2\pi] = \frac{45\pi}{12}\ [2\pi] = \frac{15\pi}{4}\ [2\pi]$

$\frac{15\pi}{4} - 2\pi = \frac{15\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

or $\frac{7\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$ donc $\frac{7\pi}{4}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DE})$.

Exercice 5 Arc associés

Pour cet exercices il faut connaitre sur le bout des doigts les formules.

Pour chaque angle proposé dans les deux premières questions il faut d'abord se demander : quelle famille, puis quelle formule

1) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ je remarque que l'angle proposé est à peine plus grand que π , donc je me dis c'est sans doute du $\pi+\frac{\pi}{6}$ mais avant d'aller plus loin je vérifie au brouillon que j'ai bien
$\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$
$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ pour cet angle c'est plus compliqué , aucune formule des arcs associés ne semble fonctionner, il reste l'astuce vue en classe d'ajouter ou de retrancher un tour (ce qui ne change pas le cosinus ou le sinus ainsi
$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
2) $\cos\frac{7\pi}{12}$ rien qu'en regardant l'énoncé on voit que ce n'est pas une famille habituelle, et la seule information que l'on a n'est pas un cosinus mais un sinus : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, ça sent les transformation à base de $\frac{\pi}{2}$. Ou encore quand on regarde $\frac{7\pi}{12}$ on voit un angle qui est plus proche de $\frac{\pi}{2}=\frac{6\pi}{12}$ que de $\pi=\frac{12\pi}{12}$, en fait est légèrement plus grand que $\frac{\pi}{2}$
$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$,
et $\sin\frac{3\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3) De gros contresens pour cet exercice , on m'a souvent écrit $\cos\left(-\frac{1}{2}\right)=\cdots$. Les élèves qui ont fait ça mélangent sujet et complément d'objet direct de la phrase. Ici on cherche un angle dont le cosinus vaut $-\frac{1}{2}$ c'est-à-dire que l'on cherche à résoudre $\cos(x)=-\frac{1}{2}$
En faisant abstraction du moins $\frac{1}{2}$ me permet de deviner que la famille d'angle est celle de $\frac{\pi}{3}$, puis je peux chercher dans mes formules d'arcs associés ceux dont le cosinus est : $-\cos\theta$ à savoir $\pi-\theta$ et $\pi+\theta$ d'où :
$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$
De même : $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 6 équation trigonométrique

Résoudre $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\frac{\pi}{6}=x+\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\ ou\\ 2x+\frac{\pi}{6}=\pi-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ [2\pi]\end{cases}$$

Attention à ce stade certain on oublié les parenthèses ou pire encore , connaissant mal leur cours on utilisé la méthode du cosinus

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\ ou\\ 3x=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ ou\\ 3x=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ ou\\ x=\frac{\pi}{6}\ [\frac{2\pi}{3}]\end{cases}$$

Ce sont les solutions dans $\mathbb{R}$ et il y en a une infinité.
Pour trouver les solutions dans $[0;2\pi]$, je dois pour chaque ligne prendre la valeur de référence puis retrancher ou ajouter l'angle du modulo pour trouver d'autres solutions dans $\mathbb{R}$, et là, de celles-ci on ne gardera que celles qui sont dans l'intervalle proposé
la première équation me donne $\frac{\pi}{6}$ et la seconde $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$
pour le tracé rien à dire de particulier