Devoir surveillé :
Logarithme népérien

Rappel : le réel dont le logarithme népérien vaut 1 est e, avec $e \approx 2{,}718$

Exercice 1

1) Donner l'ensemble de définition et dériver chacune des fonctions suivantes
   $f(x) = 3 - 5\ln(x) + 3x^2$
   $g(x) = \frac{x^2-5x}{\ln(x)}$
   $h(x) = \ln(-x^2 - 3x + 4)$
2) Question facultative : prouver l'ensemble de définition de $i(x) = \ln\left(\frac{-3x+5}{2x+3}\right)$ est $]-1{,}5; \frac{5}{3}[$
3) On admettra que $i(x) = \ln\left(\frac{-3x+5}{2x+3}\right)$ a bien pour ensemble de définition $=]-1{,}5; \frac{5}{3}[$, trouver une primitive de i sur cet intervalle.

Exercice 2

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition

$f(x) = 3x - 5 + \frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2}$ définie sur $]0; +\infty[$

$g(x) = \frac{1}{x+3} - \sin(2x + 4)$ définie sur $]-\infty; -3[$

$h(x) = \frac{7x}{x^2+5}$ définie sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes

a) $\ln(x - 5) = 7$
b) $\ln(x - 7) + \ln(x + 4) = \ln(8)$

Le reste sera à faire à la maison : DM facultatif

Exercice 4

Etude de fonction

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-\ln(x)}{x} = 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1 - \ln(x)\frac{1}{x}$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) En déduire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f
3) Dériver f et en déduire le tableau de variation de la fonction.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-5x+3}{x+5}$

Déterminer a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+5}$

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f

Donner la primitive de f s'annulant en 0

Devoir surveillé : Logarithme népérien

Exercice 1

Donner l'ensemble de définition et dériver chacune des fonctions suivantes

$f(x) = 3 - 5\ln(x) + 3x^2$ $\quad D_f =]0;+\infty[$ $\quad f'(x) = -\frac{5}{x} + 6x$

$g(x) = \frac{x^2-5x}{\ln(x)}$ $\quad D_g =]0;+\infty[$ $\quad g'(x) = \frac{(2x-5)\ln(x)-(x^2-5x)\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{(2x-5)\ln(x)-x+5}{(\ln(x))^2}$

$h(x) = \ln(-x^2 - 3x + 4)$ $\quad \Delta = 9 + 16 = 25$ $\quad x_1 = \frac{3-\sqrt{25}}{-2} = 1$ $\quad x_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{-2} = -4$

$D_h =]-4;1[$ $\quad h'(x) = \frac{-2x-3}{-x^2-3x+4}$

$i(x) = \ln\left(\frac{-3x+5}{2x+3}\right)$ étude de signe de la fonction : $\frac{-3x+5}{2x+3}$ $D_i =]-1,5;\frac{5}{3}[$

x	$-\infty$		-1,5		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
-3x+5		+		+	0	-	
2x+3		-	0	+		+	
$\frac{-3x+5}{2x+3}$		-	||	+	0	-	

$$i'(x) = \frac{\frac{-3(2x+3)-(-3x+5)(2)}{(2x+3)^2}}{\frac{-3x+5}{2x+3}} = \frac{\frac{-6x-9+6x-10}{(7-x)^2}}{\frac{-3x+5}{2x+3}} = \frac{-19}{(-3x+5)(2x+3)}$$

Exercice 2

$f(x) = 3x - 5 + \frac{1}{x} + 3\frac{1}{x^2}$ définie sur $]0;+\infty[$ $\quad F(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + \ln(x) - \frac{3}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x+3} - \sin(2x+4)$ définie sur $]-\infty;-3[$

$x + 3$ est définie, dérivable et strictement négative sur $]-\infty;-3[$

donc $G(x) = \ln(|x+3|) + \frac{\cos(2x+4)}{2} = \ln(-x-3) + \frac{\cos(2x+4)}{2}$

$h(x) = \frac{7x}{x^2+5} = \frac{7}{2} \times \frac{2x}{x^2+5}$ définie sur $\mathbb{R}$

$x^2 + 5$ est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $H(x) = \frac{7}{2}\ln(|x^2+5|) = \frac{7}{2}\ln(x^2+5)$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes

a) $\ln(x-5) = 7$ est étudiable sur $]5;+\infty[$
   $\ln(x-5) = 7 \Leftrightarrow \ln(x-5) = \ln(e^7) \Leftrightarrow x - 5 = e^7 \Leftrightarrow x = 5 + e^7$ or $5 + e^7 \in]5;+\infty[$ donc $S = \{5 + e^7\}$
b) $\ln(x-7) + \ln(x+4) = \ln(8)$ est étudiable sur $]7;+\infty[\cap]-4;+\infty[=]7;+\infty[$
   $\ln(x-7) + \ln(x+4) = \ln(8) \Leftrightarrow \ln[(x-7)(x+4)] = \ln(8) \Leftrightarrow (x-7)(x+4) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 36 = 0$
   $\Delta = 9 + 144 = 153$ $\quad x_1 = \frac{3-\sqrt{153}}{2} \approx -4,7$ $\quad x_2 = \frac{3+\sqrt{153}}{2} \approx 7,7$
   Seule x_2 est une solution acceptable car l'autre n'est pas dans $]7;+\infty[$ donc $S = \left\{\frac{3+\sqrt{153}}{2}\right\}$

Exercice 4

Etude de fonction

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x-\ln(x)}{x} = 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1 - \ln(x)\frac{1}{x}$

4) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5) En déduire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f
6) Dériver f et en déduire le tableau de variation de la fonction.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-5;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-5x+3}{x+5}$

Déterminer a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+5}$

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f

Donner la primitive de f s'annulant en 0