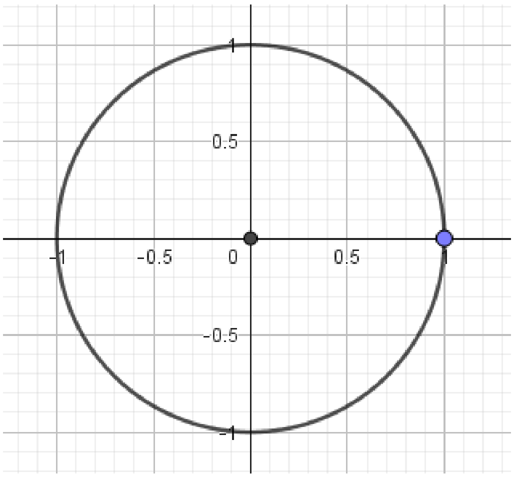
**Devoir pas très surveillé**
**Trigonométrie et produits scalaires**

**Exercice 1 : Cercle trigonométrique** (Niveau 1)
Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre, les points E, F, G et H associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{6}$ ; $\frac{\pi}{4}$ ; $-\frac{\pi}{3}$ ; $\frac{\pi}{2}$

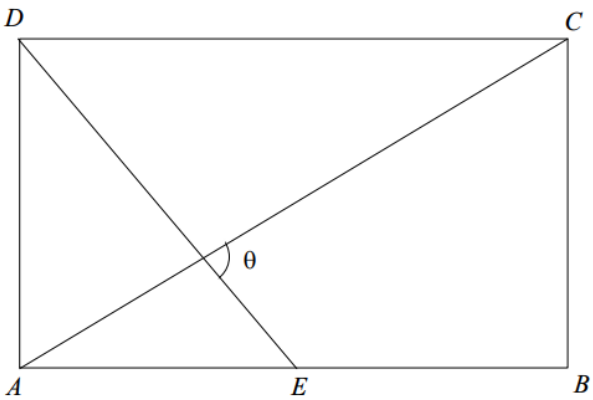



**Exercice 2 : Résolution d'équation** (Niveau 2)
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x) - cos(2x)$.
1) Montrer que la fonction $f$ est paire. Quelle interprétation graphique peut-on faire ?
2) Montrer que la fonction $f$ est $2\pi$-périodique. Quelle interprétation graphique peut-on faire ?

**Exercice 3 : angles associés**
Soit un réel $a \in [\frac{\pi}{2}; \pi[$tel que $\sin(a) = \frac{4}{5}$.
1. Quel est le signe de $\cos(a)$ ? Justifier.
2. Démontrer que $\cos^2(a) = \frac{9}{25}$
3. En déduire la valeur de $\cos(a)$.
4. Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants : $cos(-a)$, $sin(\pi + a)$, $sin(-a)$

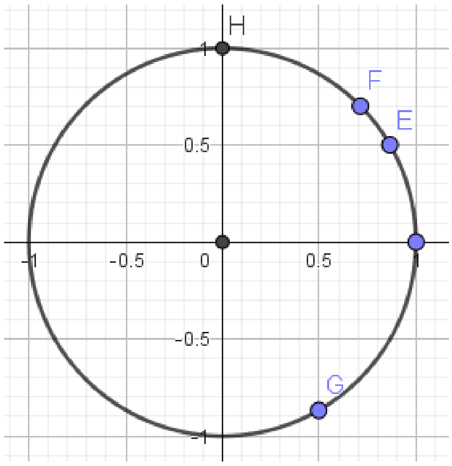
**Exercice 4 :**
Trouver la mesure de l'angle $\frac{2024\pi}{41}$ radian qui est dans l'intervalle $] -\pi ; \pi ]$.

**Exercice 5**
ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5.
E est le milieu de [AB].
1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$en fonction des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ , calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$ .
3. En déduire la valeur de l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC})$ arrondie à 0,01 degré près.




**Exercice 6**
ABCD est un parallélogramme avec AB = 4, AD = 5 et AC = 7.
1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ . Rappel : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
2. Calculer en développant : $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$.
3. En déduire BD.

**Exercice 7**
ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$.
De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$. Démontrer que ce triangle est rectangle en B.




**Correction**
**Trigonométrie et produits scalaires**

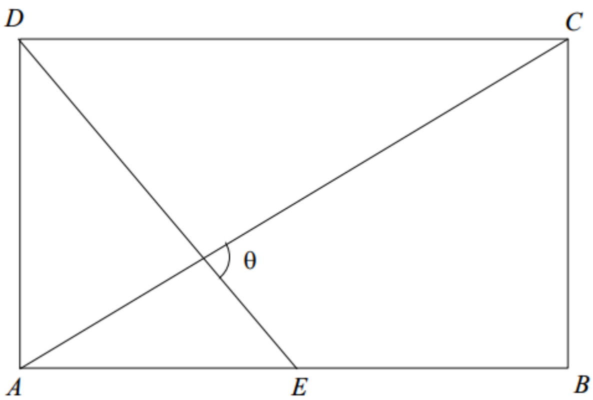
**Exercice 1 : Cercle trigonométrique** (2 points)
Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre, les points E, F, G et H associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{6}$ ; $\frac{\pi}{4}$ ; $-\frac{\pi}{3}$ ; $\frac{\pi}{2}$

**Exercice 2 : Résolution d'équation** (5 points)
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos(x) - cos(2x)$.
1) Soit $x \in \mathbb{R}, f(-x) = cos(-x) - cos(-2x) = cos(x) - cos(2x) = f(x)$. (car la fonction cosinus est paire) donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc $f$ est paire. Et donc la courbe représentative de $f$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
2) Montrer que la fonction $f$ est $2\pi$-périodique. Quelle interprétation graphique peut-on faire ?
$f(x+2\pi) = cos(x+2\pi) - cos\big(2(x+2\pi)\big) = cos(x+2\pi) - cos(2x+4\pi) = cos(x) - cos(2x)$ car la fonction cosinus est $2\pi$-périodique (et donc $4\pi$-périodique pour la deuxième partie) ainsi :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$ donc $f$ est $2\pi$-périodique.
Interprétation graphique : La courbe représentative de $f$ est constitué d'une suite de copie identiques du même motif de largeur $2\pi$. Ces copies sont consécutives.

**Exercice 3 : angles associés** (5 points)
Soit un réel $a \in [\frac{\pi}{2}; \pi[$tel que $\sin(a) = \frac{4}{5}$.
1. Comme $a \in [\frac{\pi}{2}; \pi[$ donc on est sur le second cadrant et donc $\cos(a) < 0$.
2. On sait que $\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ donc $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{9}{25}$.
3. Comme $\cos(a) < 0$ on aura : $\cos(a) = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$.
4. $cos(-a) = \cos(a) = -\frac{3}{5}$, $sin(\pi + a) = -\sin(a) = -\frac{4}{5}$, $sin(-a) = -\sin(a) = -\frac{4}{5}$

**Exercice 4 :** (2 points)
$\frac{\frac{2024\pi}{41}}{2\pi} = \frac{2024}{82} \approx 24{,}68 \approx 25$
$\frac{2024\pi}{41} - 25 \times 2\pi = -\frac{26}{41}\pi$
on a $-\frac{26}{41}\pi \in ]-\pi ; \pi]$ donc $-\frac{26}{41}\pi$ est la mesure de notre angle dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
Remarque $\frac{2024\pi}{41}$ et $-\frac{26}{41}\pi$ sont deux mesures du même angle.

**Exercice 5** (8 points)
ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5. E est le milieu de [AB].




1. Calculer les longueurs AC et DE.
Dans ABC rectangle en B on a d'après le théorème de Pythagore on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ donc $AC = \sqrt{34}$
Dans ADE rectangle en A on a d'après le théorème de Pythagore on a : $DE^2 = AE^2 + AD^2 = 2{,}5^2 + 3^2 = 6{,}25 + 9 = 15{,}25$ donc $DE = \sqrt{15{,}25}$.

2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$en fonction des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ , calculer le produit scalaire
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).\left(-\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$
$= \overrightarrow{AB}.(-\overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AD}.(-\overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$
$= -0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}AB^2 - AD^2 = \frac{1}{2}5^2 - 3^2 = 12{,}5 - 9 = 3{,}5$ .
3. En déduire la valeur de l'angle orienté $\theta = \left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC}\right)$ arrondie à 0,01 degré près.

$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{DE}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = \|\overrightarrow{DE}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos\left(\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)\right)$
$\Leftrightarrow 3{,}5 = \sqrt{15{,}25}\sqrt{34}\cos\left(\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{3{,}5}{\sqrt{15{,}25}\sqrt{34}} = \cos\left(\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)\right)$ ainsi $\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3{,}5}{\sqrt{15{,}25}\sqrt{34}}\right)$
Conclusion : $\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right) \approx 81{,}16°$

**Exercice 6** (5 points)
ABCD est un parallélogramme avec AB = 4, AD = 5 et AC = 7.
1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$ or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right) = \frac{1}{2}(7^2-4^2-5^2) = \frac{1}{2}(49-16-25) = \frac{1}{2}8 = 4$
2. Calculer en développant : $\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2$.
$\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 5^2 - 2\times 4 + 4^2 = 25-8+16 = 33$
3. En déduire BD.
$\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{BD}\right)^2$ ainsi $33 = BD^2$ donc $BD = \sqrt{33}$

**Exercice 7** (3 points)
ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$.
De plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$. Démontrer que ce triangle est rectangle en B.
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = BA^2 + \left(-\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AC} = BA^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4-4 = 0$
Donc $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ donc ABC est rectangle en B.